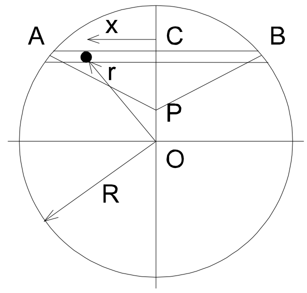
MAAK ELKE OPGAVE OP EEN APART VEL, voorzien van je **naam**.
Op vel 1: **studentnummer, naam, adres, postkode, woonplaats** en **studierichting.**
De onderdelen van de opgaven zijn veelal onafhankelijk van elkaar op te lossen. Ook al kun je een bepaald onderdeel niet oplossen, **probeer dan toch het vervolg** van de opgave.

1. **De tunnel**



Figuur 1

Door de - bolvormig verondersteld - Aarde heeft men een tunnel geboord van A via C naar B. De Aarde heeft een massa M **F** en een straal $R = 6,4 \cdot 10^6$ m (zie figuur 1).
Een massa m wordt in A, zonder beginsnelheid, losgelaten. Veronderstel geen wrijving.

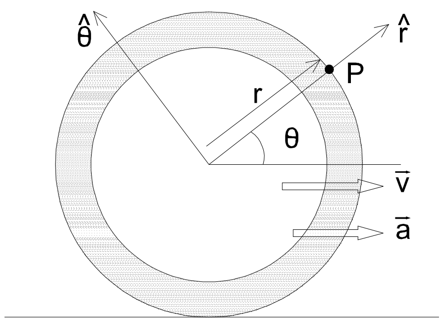
a. Bereken de grootte van de zwaartekracht die m ondervindt als deze zich in de tunnel op een afstand r van het centrum van de Aarde bevindt.

b. Laat zien dat, uitgaande van de component van de zwaartekracht evenwijdig aan de tunnel en met behulp van een bewegingsvergelijking, de massa m een harmonische trilling gaat uitvoeren.

c. Bereken de tijd waarin de massa m van A naar B via C gaat, als gegeven is dat de versnelling van de zwaartekracht aan het aardoppervlak $g = 9,81$ m/s^2.

d. Beargumenteer waarom de tijd die de massa m nodig heeft om van A naar B **via P** te gaan, **kleiner** is dan de in c. berekende tijd, als P in ligt tussen C en het centrum O van de Aarde.

2. **De raceauto**



Figuur 2

Een raceauto versnelt zonder te slippen met een constante versnelling $\vec{a}$. Het punt P ligt op de buitenkant van de band. Veronderstel dat de band star is en cirkelvormig blijft (zie figuur 2).

a. Geef de componenten van de versnelling $\vec{a}$ in het punt P ten opzichte van het assenstelsel $S' = \{\hat{r}, \hat{\theta}\}$.

b. Geef verbanden tussen de grootte van de versnelling a, de snelheid v, de straal r, de hoeksnelheid $\frac{d\theta}{dt}$ en de hoekversnelling $\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

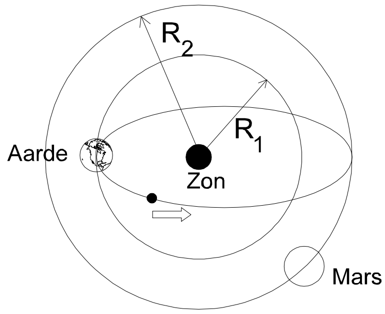
c. Bereken de versnelling $\vec{a}'$ die het punt P in het stelsel S' ondervindt, uitgedrukt in a, v, θ en r.

d. Laat zien dat de grootte van de versnelling $|\vec{a}'|$ in P maximaal is als geldt: $\tan(\theta) = \frac{ar}{v^2}$.

3. **De Marsverkenner**

Een Marsverkenner wordt vanaf de aarde in een ellipsvormige baan om de zon gebracht. Het verst van de zon verwijderde punt valt samen met de baan van Mars. De banen van de Aarde en van Mars worden cirkelvormig verondersteld met stralen R_1 resp. R_2.

Voor de beweging van de verkenner laten we de invloed van de Aarde en Mars buiten beschouwing.



Figuur 3

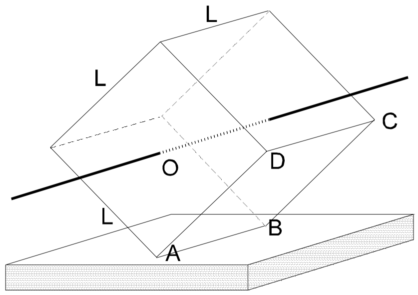
a. Bereken de excentriciteit ε van de baan van de verkenner, als gegeven is dat $\dfrac{R_2}{R_1} = 1{,}5$.

Voor alle mass's die ellipsvormige banen om de zon beschrijven geldt de derde wet van Kepler:
$\dfrac{T^2}{a^3}$ = constant , hierin is T de omloopstijd van de baan en a de helft van de lange as van de ellips.

b. Bereken in hoeveel jaar de verkenner er over doet om vanaf de Aarde, de baan van Mars te bereiken.

4. **De vallende kubus**

Een homogene kubus met een massa m en een ribbe L, ligt met de ribbe AB op een horizontaal vlak. Met een klein zetje wordt de kubus uit z'n evenwicht gebracht en valt om.



Figuur 4

a. Bereken het traagheidsmoment I_O van de kubus ten opzichte van de horizontale as door het centrum van de kubus.

b. Laat zien dat, als de ribbe AB op z'n plaats blijft, de hoeksnelheid ω waarmee de kubus om AB draait, op het moment dat het zijvlak ABCD de grond raakt, gegeven wordt door:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}\left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

Veronderstel nu dat de ribbe AB wrijvingsloos kan glijden.

c. Bereken in dìt geval de hoeksnelheid ω waarmee de kubus om z'n as draait, op het moment dat het zijvlak ABCD de grond raakt.

1a. $f(r) = G.\dfrac{m.m(r)}{r^2}$ Met $m(r) = M\dfrac{r^3}{R^3}$ volgt: $f(r) = GmM\dfrac{r}{R^3}$

b. De component van de zwaartekracht langs de tunnel is: $F(x) = F(r)\dfrac{x}{r} = \dfrac{GmM}{R^3}x$.

De bewegingsvergelijking wordt dan: $m\ddot{x} = -\dfrac{GmM}{R^3}x$. Deze heeft als oplossing:

$x(t) = x_0\sin(\omega t)$ met $\omega = \sqrt{\dfrac{GM}{R^3}} = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$.

c. $t_{AB} = \dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\dfrac{R}{g}} = \pi\sqrt{\dfrac{6,4.10^6}{9,81}} = 2,5.10^3 \text{ sec} \approx 42,5 \textit{ minuten}$

2a. $\vec{a} = a\cos(\theta)\,\hat{r} - a\sin(\theta)\,\hat{\theta}$

b. $v = r\dfrac{d\theta}{dt}$ en $a = r\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

c. $\vec{a}\,' + \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\hat{\theta} = -\dfrac{v^2}{r}\,\hat{r} + a\hat{\theta}$

zodat $\vec{a}\,' = -(a\cos(\theta) + \dfrac{v^2}{r})\,\hat{r} + a(\sin(\theta) + 1)\,\hat{\theta}$

d. Als de grootte van de versnelling maximaal is dan geldt:

$0 = \dfrac{d}{d\theta}|\vec{a}\,'|^2 = -2(a\cos(\theta) + \dfrac{v^2}{2})a\sin(\theta) + 2a^2(\sin(\theta) + 1)\cos(\theta)$

zodat volgt: $\tan(\theta) = \dfrac{ar}{v^2}$

3a. $r = \dfrac{r_o}{1 + \varepsilon\cos\theta}$ daaruit volgt: $R_1 = \dfrac{r_o}{1 + \varepsilon}$ en $R_2 = \dfrac{r_o}{1 - \varepsilon}$ zodat $\varepsilon = \dfrac{R_1/R_2 - 1}{R_1/R_2 + 1} = 0,2$

b. $a = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$ daaruit volgt: $T^2 = a^3\dfrac{T_1^2}{R_1^3} \rightarrow T = \left[\dfrac{R_1 + R_2}{2R_1}\right]^{3/2} \textit{jaar} = 1,4 \textit{ jaar}$

De vluchttijd is dus 0,7 jaar.

4a. $I_O = \dfrac{1}{12}m(L^2 + L^2) = \dfrac{1}{6}mL^2$

b. $\dfrac{1}{2}I_A\omega^2 = \Delta Up = mgL(\dfrac{1}{2}\sqrt{2} - \dfrac{1}{2})$ Met $I_A = I_O + m(\dfrac{1}{2}\sqrt{2}L)^2 = \dfrac{2}{3}mL^2$

volgt: $\omega^2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{g}{L}(\sqrt{2} - 1)$

c. $\dfrac{1}{2}I_O\omega^2 + \dfrac{1}{2}mv^2 = \Delta Up$ Met $v = \dfrac{1}{2}L\omega$ volgt: $\omega^2 = \dfrac{12}{5}\dfrac{g}{L}(\sqrt{2} - 1)$